

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. 26 de Enero de 2011.

1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por la expresión

$$f(x, y) = \ln x + \ln y + xye^{y-1}$$

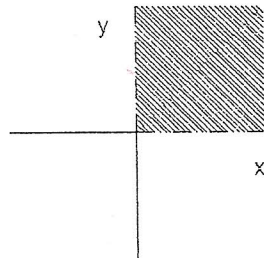
a) Identificar su dominio. ¿Es un conjunto cerrado? ¿Y abierto? ¿Es acotado? ¿Y compacto? Responder razonadamente.

Respuesta:

$$\text{Dom} f(x, y) = \{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \wedge y > 0\}$$

La función estará definida para todos aquellos valores pertenecientes a \mathbb{R}^2 de manera que tanto x como y sean mayores que cero. Recordemos que el argumento de un logaritmo no puede ser ni un número negativo, ni cero.

Para comprobar si el dominio es un conjunto abierto o si es un conjunto cerrado, o está acotado, o es compacto. Procedamos a su representación gráfica.



Academia Buenavista
c. Fuente de Acevedo, 101
Teléfono 824 00 17
33006 - OVIEDO

Se trata de todos aquellos valores pertenecientes a \mathbb{R}^2 que están en el primer cuadrante excluyendo a los que están tanto en el eje X como en el eje Y.

Se trata de un conjunto abierto pues coincide con su interior, ya que

todos los puntos del dominio son puntos interiores. No es cerrado, ya que es abierto. Para que fuese cerrado todos los puntos frontera le deberían pertenecer y en nuestro caso concreto no le pertenece ninguno. No está acotado puesto que no podemos encontrar una bola abierta de radio finito que lo contenga.

- b) ¿Es la función continua y diferenciable en su dominio? Utilizar, si es posible, su diferencial para estimar el valor aproximado de $f(1,03;0,97)$.

Respuesta:

La función es continua y diferenciable en su dominio. Se trata de las funciones logaritmo, polinómica y exponencial del número e que son siempre continuas en su dominio. En cuanto a la diferenciabilidad puedo recurrir a la condición suficiente de diferenciabilidad que nos dice que una función es diferenciable en un punto si existen las derivadas parciales en él y son continuas.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{1}{x} + ye^{y-1}$$
$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{1}{y} + x[e^{y-1} + ye^{y-1}]$$

Las derivadas parciales existen y son continuas en todos los puntos del dominio, por tanto la función es diferenciable en su dominio.

Para calcular el valor aproximado de $f(1,03;0,97)$ a través de su diferencial:

$$1,03 = 1 + 0,03$$

$$0,97 = 1 - 0,03$$

Tendremos que calcular las derivadas parciales en $(1,1)$, punto que pertenece al dominio siendo $dx = 0,03$ y $dy = -0,03$:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{(1,1)} = 1 + 1 = 2$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_{(1,1)} = 1 + [1 + 1] = 3$$

Luego:

$$\begin{aligned} f(1,03;0,97) &= f(1,1) + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{(1,1)} dx + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_{(1,1)} dy = \\ &= 1 + 2 * 0,03 + 3 * (-0,03) = 1 + 0,06 - 0,09 = 0,97 \end{aligned}$$

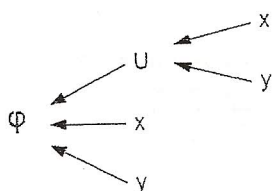
Hagamos la comprobación correspondiente:

$$\begin{aligned} f(1,03;0,97) &= \ln(1,03) + \ln(0,97) + [1,03 * 0,97 * e^{0,97-1}] = \\ &= 0,0296 + (-0,0305) + [0,9696] = 0,9687 \approx 0,97 \end{aligned}$$

2. Sabiendo que la ecuación $\varphi(U, x, y) = \ln U - \frac{yx^2}{U} = -1$ define implícitamente la función $U = f(x, y)$ en el punto $(1,1,1)$, donde U es la utilidad de un individuo y x e y representan las cantidades consumidas de dos bienes, calcular las utilidades marginales respecto de ambos bienes.

Respuesta:

Se trata de derivación implícita, que es un caso particular de derivación compuesta. Como ya me dice el enunciado del ejercicio que la ecuación dada define implícitamente la función $U = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 1)$, eso quiere decir que se cumple el teorema de existencia de la función implícita en ese punto (recordemos que es una condición suficiente y puntual) por lo que procedo a representar las correspondientes ramas que relacionan las distintas variables:



Academia Buenavista
c/ Fuertes Acevado, 101
Teléfono 524 00 17
33006 - OVIEDO

Derivo ahora implícitamente con respecto de x y de y . Así pues:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta U} \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta\varphi}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta U} \frac{\delta U}{\delta y} + \frac{\delta\varphi}{\delta y} = 0$$

Las utilidades marginales respecto de ambos bienes, son las derivadas parciales con respecto de x y respecto de y de la función de utilidad.

En el punto $(1,1,1)$:

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)_{(1,1,1)} = \left[-\frac{x^2}{U}\right]_{(1,1,1)} = -1$$

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)_{(1,1,1)} = \left[-\frac{y}{U}2x\right] = -2$$

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta U}\right)_{(1,1,1)} = \left[\frac{1}{U} - yx^2\left(\frac{-1}{U^2}\right)\right]_{(1,1,1)} = 1 + 1 = 2$$

$$\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right)_{(1,1)} = \frac{\left(-\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)_{(1,1,1)}}{\left(\frac{\delta\varphi}{\delta U}\right)_{(1,1,1)}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\left(\frac{\delta U}{\delta y}\right)_{(1,1)} = \frac{\left(-\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)_{(1,1,1)}}{\left(\frac{\delta\varphi}{\delta U}\right)_{(1,1,1)}} = \frac{1}{2}$$

3. a) Sean los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y \vec{s} de \mathbb{R}^3 , de los que se sabe que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$ (con α y $\beta \in \mathbb{R}$) y que $\text{rango}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{s}) = 3$, analizar razonadamente si los conjuntos de vectores $C_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $C_2 = \{\vec{u}, \vec{w}, \vec{s}\}$ constituyen o no una base de \mathbb{R}^3 .

Respuesta:

$a_1)$ C_1 no es una base de \mathbb{R}^3 puesto que \vec{v} es combinación lineal de \vec{u} y \vec{w} con lo que el conjunto de 3 vectores sería un conjunto de vectores linealmente dependientes. Para que formara base deberían ser linealmente independientes.

$a_2)$ C_2 son una base puesto que el rango de la matriz formada por los 3 vectores es 3 (coincide el número de vectores con el rango). Eso me

garantiza que los 3 vectores son linealmente independientes y tengo una propiedad que me dice que n vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n forman base, es decir 3 vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 forman base.

b) Determinar la matriz asociada a la siguiente transformación lineal

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x, y, z) = (2x + y, x - y + z)$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (2, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (1, -1) \\ f(0, 0, 1) &= (0, 1) \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar si es o no diagonalizable.

Respuesta:

Para estudiar si la matriz dada es diagonalizable, previamente voy a calcular los valores propios o autovalores de dicha matriz a partir de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda) = 0$$

Sacando factor común $(2-\lambda)$:

$$(2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 2] = 0$$

Academia Buenavista
c. P. de Acedo, 101
Teléfono 324 0017
33006 - OVIEDO

Un producto de factores igual a cero, igualamos ambos factores a cero:

$$\begin{aligned} 2 - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda_1 = 2 \\ (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = 0 &\Rightarrow 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda = 0 &\Rightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

